

Łagodne wprowadzenie do analizy algorytmów

Marek Kubale

Gdańsk 2022

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Dariusz Mikielwicz

REDAKTOR

Zdzisław Puhaczewski

RECENZENT

Krzysztof Goczyła

Wydanie XVI – 2021

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
<https://www.sklep.pg.edu.pl>

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy.

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej,
Gdańsk 2022

ISBN 978-83-7348-869-4

Spis treści

PRZEDMOWA	5
1. WPROWADZENIE	7
1.1. Rys historyczny	7
1.2. Klasyfikacja problemów	9
1.3. Język PseudoPascal	15
1.4. Podstawy matematyczne	17
1.4.1. Logarytmy i zaokrąglenia całkowite	17
1.4.2. Sumy szeregów	18
1.5. Symbole oszacowań asymptotycznych	20
1.5.1. Symbol $O(\cdot)$	21
1.5.2. Symbol $o(\cdot)$	21
1.5.3. Symbol $\Omega(\cdot)$	22
1.5.4. Symbol $\omega(\cdot)$	22
1.5.5. Symbol $\Theta(\cdot)$	23
1.5.6. Symbol $\tilde{\Theta}(\cdot)$	24
1.6. Równania rekurencyjne niejednorodne	24
1.6.1. Równania typu „dziel i zwyciężaj”	25
1.6.2. Równania typu „jeden krok w tył”	27
Zadania	31
2. PODSTAWY ANALIZY ALGORYTMÓW	37
2.1. Wstęp	37
2.2. Poprawność algorytmów	39
2.3. Złożoność czasowa algorytmów	42
2.3.1. Operacje podstawowe	42
2.3.2. Rozmiar danych	43
2.3.3. Pesymistyczna złożoność obliczeniowa	44
2.3.4. Oczekiwana złożoność obliczeniowa	44
2.4. Złożoność pamięciowa	47
2.5. Optymalność	51
2.6. Dokładność numeryczna algorytmów	53
2.6.1. Zadania źle uwarunkowane	53
2.6.2. Stabilność numeryczna	55
2.7. Prostota algorytmów	56
2.8. Wrażliwość algorytmów	58
2.9. Programowanie a złożoność obliczeniowa	60
2.9.1. Rząd złożoności obliczeniowej	60
2.9.2. Stała proporcjonalności złożoności obliczeniowej	63
2.9.3. Imperatyw złożoności obliczeniowej i odstępstwa	66

2.10. Przykład analizy: mnożenie macierzy	66
2.11. Algorytmy probabilistyczne	70
Zadania	73
3. PODSTAWOWE STRUKTURY DANYCH	82
3.1. Tablice	82
3.2. Listy	84
3.3. Zbiory	85
3.4. Grafy	86
3.4.1. Macierz sąsiedztwa wierzchołków	92
3.4.2. Listy sąsiedztwa wierzchołków	95
3.4.3. Pęki wyjściowe	96
Zadania	96
4. DODATEK: ZAGADKI ALGORYTMICZNE	103
4.1. Alicja i Bogdan w pizzerii	103
4.2. Alicja i Bogdan w naleśnikarni	104
4.3. Alicja i Bogdan w samochodzie	105
4.4. Alicja i Bogdan wśród ludożerców	105
4.5. Alicja i Bogdan na działce	106
4.6. Alicja i Bogdan wyprawiają wesele	107
4.7. Bogdan maluje płot	107
4.8. Alicja i Bogdan w krainie czarów	108
4.9. Alicja w banku	108
4.10. Alicja i Bogdan w kapeluszach	109
4.11. Alicja i Bogdan na czasach	109
4.12. Kilka praktycznych problemów Alicji i Bogdana	110
4.13. Bogdan w więzieniu	110
SŁOWNIK POLSKO-ANGIELSKI	112
LITERATURA	117

PRZEDMOWA

Przekazywana do rąk czytelników książka jest 17. wydaniem podręcznika akademickiego, opublikowanego nakładem Wydawnictwa Politechniki Gdańskiej pod tym samym tytułem. Od momentu poprzedniego wydania wystąpiły nowe fakty w zakresie komputerowego stymulowania odkryć w dziedzinie teorii algorytmów i teorii liczb. Stąd zrodziła się potrzeba kolejnego wydania, uzupełnionego o najnowsze informacje z tych dziedzin oraz nowe zadania algorytmiczne.

Oddawany do rąk czytelników podręcznik jest przeznaczony dla osób interesujących się podstawami informatyki, w tym przede wszystkim dla studentów kierunku informatyka na Wydziale ETI Politechniki Gdańskiej. Formalnie rzecz biorąc, jego treść pokrywa pierwszą część wykładu z przedmiotu „Podstawy analizy algorytmów”, tj. algorytmy i problemy wielomianowe i całość wykładu z przedmiotu „Elementy analizy algorytmów”, ale stanowi też miejscami rozszerzenie programu tych przedmiotów, które są prowadzone na II roku kierunku informatyka. W tym miejscu odnotujmy, że drugą część wykładu doskonale pokrywa książka Krzysztofa Giary „Złożoność obliczeniowa algorytmów w zadaniach” [9] oraz dawny skrypt autora [12]. W szczególności niniejszy podręcznik może służyć jako wprowadzenie do wykładu „Algorytmy i struktury danych”. Jego fragmenty mogą być także wykorzystane w nauczaniu przedmiotu „Matematyka dyskretna”. Sądzę, że książka może ponadto zainteresować studentów kierunku informatyka na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego, oraz studentów kierunków pokrewnych, np. matematyka stosowana.

Zakładam, że czytelnik ma pewne podstawowe przygotowanie z matematyki dyskretnej i że umie układać algorytmy w Pascalu lub dowolnym innym języku wysokiego poziomu. Znajomość przedmiotów „Metody i techniki programowania”, „Praktyka programowania” oraz „Matematyka dyskretna” jest pożądana, aczkolwiek niekonieczna, przy lekturze tego podręcznika akademickiego.

Niniejsza pozycja składa się z trzech rozdziałów zasadniczych. Rozdział 1 daje podstawy formalne, niezbędne przy analizie algorytmów pod kątem złożoności obliczeniowej. Podajemy tutaj klasyfikację problemów rozwiązywalnych za pomocą komputerów, przypominamy wybrane pojęcia matematyczne, definiujemy symbole oszacowań asymptotycznych. Jednakże najwięcej miejsca poświęcamy metodom najczęściej spotykanym przy analizie złożoności obliczeniowej algorytmów rekurencyjnych.

Rozdział 2 wprowadza w zagadnienie analizy algorytmów z różnych punktów widzenia. Algorytmy, które tutaj rozważamy, są najprostsze możliwe, tj. szeregowe, scentralizowane, statyczne i dokładne. Rozważamy tutaj takie zagadnienia, jak: poprawność, złożoność czasowa, złożoność pamięciowa, optymalność, stabilność numeryczna, prostota i wrażliwość. Rozdział zamykamy przykładem algorytmu probabilistycznego.

Ostatni rozdział 3 przedstawia podstawowe struktury danych, gdyż są one niezbędnym komponentem każdego rozwiązania algorytmicznego. W rozdziale tym rozważamy takie struktury, jak: tablica, lista, zbiór, a zwłaszcza graf. Strukturogram grafowym poświęcamy szczególnie wiele miejsca, gdyż grafy są najczęściej spotykanym modelem matematycznym

w informatyce. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w podręczniku Krzysztofa Goczyle „Struktury danych” [10]. Co ważne i cenne dla czytelników studiujących zagadnienia złożoności obliczeniowej algorytmów, każdy z powyższych rozdziałów kończy się zestawem ponad 30 zadań niezbędnych do sprawdzenia nabytej wiedzy i umiejętności oraz umożliwiających jej pogłębienie.

Skrypt kończymy dodatkiem, który zawiera sekwencję 30 zagadek algorytmicznych, które wymagają znalezienia efektywnych algorytmów rozwiązujących postawione problemy. Czytelnik, przystępując do ich rozwiązywania, będzie miał okazję, aby sprawdzić swoją wiedzę i umiejętności nabyte na zajęciach z przedmiotu „Podstawy analizy algorytmów”. Wreszcie na sam koniec zamieszczamy słownik polsko-angielski ważniejszych pojęć z tego zakresu.

W tym miejscu pragnę wyrazić wdzięczność recenzentowi prof. dr. hab. inż. Krzysztofowi Goczyle za życzliwe sugestie; dziękuję również mgr. inż. Janowi Wojtkiewiczowi za pomoc edytorską oraz zespołowi Wydawnictwa PG za wnikliwą korektę. Z góry dziękuję również studentom za wszelkie uwagi merytoryczne, które można kierować pocztą elektroniczną na podany niżej adres.

Gdańsk, wrzesień 2022 r.

Marek Kubale
kubale@eti.pg.edu.pl